УДК 518.5

И. В. Бойков

ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Вычислены поперечники Бабенко и Колмогорова функциональных множеств $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, где $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1, 2, \ldots$, r и u – натуральные числа, γ – действительное неотрицательное число. Построены локальные сплайны, которые являются оптимальным методом аппроксимации функциональных множеств $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Ключевые слова: аппроксимация, локальные сплайны, поперечники Бабенко и Колмогорова.

Abstract. Evaluated Babenko and Kolmogorov widths of functional sets $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ and $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, where $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1, 2, \ldots$, r and u are natural numbers, γ is a real nonnegative number. Constructed local splines which are the optimal in order methods for approximation of functional classes $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ and $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Keywords: approximation, local splines, Babenko and Kolmogorov widths.

Введение

Класс функций $Q_r(\Omega, M)$ был введен К. И. Бабенко, и им же была сформулирована задача вычисления поперечников Бабенко и Колмогорова на этом классе функций [1]. Эта задача была решена автором [2]. Им же были введены классы функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$, $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и вычислены поперечники Бабенко и Колмогорова на этих классах функций [3, 4]. В работах [2–4] были также построены локальные сплайны вычисления функций из классов Q_r, $Q_{r,\gamma}$, $B_{r,\gamma}$. Показано, что эти сплайны являются наилучшим по порядку по точности методом приближения функций из классов Q_r, $Q_{r,\gamma}$, $B_{r,\gamma}$.

Интерес к наилучшей аппроксимации классов функций Q_r, $Q_{r,\gamma}$, $B_{r,\gamma}$ объясняется тем, что решения многих видов уравнений (эллиптических уравнений, слабосингулярных интегральных уравнений, сингулярных интегральных уравнений) принадлежат этим классам функций.

В данной работе результаты [3, 4] распространяются на более широкие классы функций – классы функций $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1, 2, \ldots$ Для этих классов функций вычислены поперечники Бабенко и Колмогорова и построены локальные сплайны.

Напомним определения поперечников Бабенко и Колмогорова.

Пусть B – банахово пространство, $X \subset B$ – компакт, $\Pi : X \to \bar{X}$ – представление компакта $X \subset B$ конечномерным пространством $\bar{X}$.

Определение 1 [1]. Пусть L^n – множество n-мерных линейных подпространств пространства B. Выражение

$$d_n(X,B)=\inf_{L^n}\sup_{x\in X}\inf_{u\in L^n}\|x-u\|,$$

где последний inf берется по всем подпространствам L^n размерности n, определяет n-поперечник Колмогорова.

Определение 2 [1]. Пусть χ – множество всех n-мерных линейных подпространств пространства B, $\mathrm{Map}(X,\chi)$ – совокупность всех непрерывных отображений вида $\Pi: X\to\bar{X}$, где $\bar{X}\in\chi$. Выражение

$$d_n'(X,B)=\inf_{(L^n,\Pi)}\sup_{x\in X}\|x-\Pi(x)\|,$$

где inf берется по всевозможным парам (L^n,Π), состоящим из n-мерного линейного пространства $L^n\subset B$ и непрерывного отображения $\Pi: X\to L^n$, определяет линейный n-поперечник Колмогорова.

Определение 3 [1]. Пусть $\chi\in R^n$. Выражение

$$\delta_n(X)=\inf_{(\Pi:X\to R^n)}\sup_{x\in X}\operatorname{diam}\Pi^{-1}\Pi(x),$$

где inf берется по всем непрерывным отображениям $\Pi: X\to R^n$, определяет n-поперечник Бабенко.

Приведем определения классов Q_r, $Q_{r,\gamma}$, $Q^u_{r,\gamma}$, $\bar{Q}^u_{r,\gamma}$.

В работе К. И. Бабенко [1] введен класс функций $Q_r(\Omega, M)$.

Определение 4. Пусть $\Omega=[-1,1]^l$, $l=1,2,\ldots$ Функция $\varphi(x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит классу $Q_r(\Omega,M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega}\left|\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\ldots\partial x_l^{v_l}\right|\le M$$

при $0\le|v|\le r$;

$$\left|\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\ldots\partial x_l^{v_l}\right|\le M/(d(x,\Gamma))^{|v|-r},\ x\in\Omega\setminus\Gamma,$$

при $r<|v|\le 2r+1$, где $x=(x_1,\ldots,x_l)$, $v=(v_1,\ldots,v_l)$, $|v|=v_1+\ldots+v_l$, $d(x,\Gamma)$ – расстояние от точки x до границы Γ области Ω, вычисляемое по формуле $d(x,\Gamma)=\min\limits_{1\le i\le l}\min(|-1-x_i|,|1-x_i|)$.

Приводимые ниже классы функций являются обобщениями $Q_r(\Omega,M)$.

Определение 5 [3]. Пусть $\Omega=[-1,1]^l$, $l=1,2,\ldots$ Функция $\varphi\ (x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит классу $Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega}\left|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\ldots\partial x_l^{v_l}\right|\le M$$

при $0\le |v|\le r$;

$$\left|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\ldots\partial x_l^{v_l}\right|\le M/\left(d(x,\Gamma)\right)^{|v|-r-\zeta},\ x\in\Omega\setminus\Gamma,$$

при $r<|v|\le s$, где $s=r+[\gamma]+1$, $\gamma=[\gamma]+\mu$, $0<\mu<1$, $\zeta=1-\mu$ при γ нецелом, $s=r+\gamma$ при γ целом.

Определение 6. Пусть $\Omega=[-1,1]^l$, $l=1,2,\ldots$, γ и u – неотрицательные целые числа. Множество $\bar{Q}^u_{r\gamma}(\Omega,M)$ состоит из функций $f(t_1,t_2,\ldots,t_l)$, удовлетворяющих условиям

$$\max_{t\in\Omega}\left|\partial^{|v|}\varphi(t)/\partial t_1^{v_1}\ldots\partial t_l^{v_l}\right|\le M,\ 0\le |v|\le r-1;$$

$$\left|\partial^{|v|}\varphi(t)/\partial t_1^{v_1}\ldots\partial t_l^{v_l}\right|\le M\left(1+|\ln^u d(t,\Gamma)|\right), t\in\Omega\setminus\Gamma, |v|=r;$$

$$\left|\partial^{|v|}\varphi(t)/\partial t_1^{v_1}\ldots\partial t_l^{v_l}\right|\le M\left(1+|\ln^{u-1} d(t,\Gamma)|\right)/\left(d(t,\Gamma)\right)^{|v|-r}, t\in\Omega\setminus\Gamma, r<|v|\le s,$$

где $s=r+\gamma$.

Наряду с классом функций $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$ введем класс функций $Q^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$.

Определение 7. Пусть $\Omega=[-1,1]^l$, $l=1,2,\ldots$, u – натуральное число, γ – нецелое число. Класс $Q^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$ состоит из функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\max_{t\in\Omega}\left|\partial^{|v|}\varphi(t)/\partial t_1^{v_1}\ldots\partial t_l^{v_l}\right|\le M, 0\le |v|\le r,$$

$$\left|\partial^{|v|}\varphi(t)/\partial t_1^{v_1}\ldots\partial t_l^{v_l}\right|\le \frac{M}{\left(d(t,\Gamma)\right)^{|v|-r-\zeta}}\left(1+|\ln^u d(t,\Gamma)|\right), r<|v|\le s,$$

где $s=r+[\gamma]+\mu$, $\gamma=[\gamma]+\mu$, $0<\mu<1$, $\zeta=1-\mu$.

Через $T_r\left(f,[a,b],c\right)=\sum_{k=0}^{r}\frac{f^k(c)}{k!}\left(t-c\right)^k$ обозначим отрезок ряда Тейлора функции $f(t)$, определенный в области $[a,b]$ по степеням $(t-c)$, $c\in[a,b]$.

1 Поперечники функциональных множеств $Q^u_{r,\gamma}$, $\bar{Q}^u_{r,\gamma}$, $\Omega=[-1,1]^l$

Теорема 1. Пусть $\Omega=[-1,1]^l$, r,u,γ – положительные целые числа, $s=r+\gamma$. Справедлива оценка

$$\delta_n(\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega,M)) \asymp d_n(\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega,M),C) \asymp n^{-s}.$$

Доказательство. Вначале оценим снизу величину $\delta_n(\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega,M))$. С этой целью заметим, что класс функций $Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$ вложен в класс функций $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$. Для класса функций $Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$ известна [3, 4] оценка снизу поперечника Бабенко:

$$\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega,M)) \geq An^{-s}.$$

Следовательно,

$$\delta_n(\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega,M)) \geq \delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega,M)) \geq An^{-s}. \quad (1)$$

Оценка снизу получена.

Построим локальные сплайны, аппроксимирующие функции из класса $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$ с точностью $O(n^{-s})$.

В отдельности опишем построение в случае $u=1$ и $u \geq 2$.

Пусть $u=1$. Разделим сегмент $[-1,1]$ на $2N$ частей точками $t_k = -1+(k/N)^v$, $\tau_k = 1-(k/N)^v$, $k=0,1,\ldots,N$, $v = s/(s-\gamma)$. Введем обозначения: $\Delta^1_k = [t_k, t_{k+1}]$, $\Delta^2_k = [\tau_{k+1}, \tau_k]$, $k=0,1,\ldots,N-1$.

Сегменты Δ^1_0, Δ^2_0 разделим на более мелкие сегменты $\Delta^1_{0,j} = [t_{0,j}, t_{0,j+1}]$, $\Delta^2_{0,j} = [\tau_{0,j+1}, \tau_{0,j}]$, $j=0,1,\ldots,M_0-1$, где $t_{0,j} = t_0 + (t_1 - t_0)j/M_0$, $\tau_{0,j} = \tau_0 - (\tau_0 - \tau_1)j/M_0$, $j=0,1,\ldots,M_0$, $M_0 = [\ln N]$.

Построим интерполяционные полиномы таким образом, чтобы в число узлов интерполяции входили концы сегментов $\Delta^i_{0,j}$, $i=1,2$, $j=0,1,\ldots,M_0-1$, Δ^i_k, $i=1,2$, $k=0,1,\ldots,N-1$.

Полином $P_s(f,[a,b])$, интерполирующий функцию $f(t) \in \bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$ на сегменте $[a,b]$, строится следующим образом.

Обозначим через ζ_k, $k=1,2,\ldots,s$ узлы полинома Чебышева первого рода степени s. Отобразим сегмент $[\zeta_1,\zeta_s] \subset [-1,1]$ на сегмент $[a,b]$ таким образом, чтобы точки ζ_1 и ζ_s перешли в точки a и b соответственно. Образы точек $\zeta_1,\ldots,\zeta_s$ на сегменте $[a,b]$ обозначим через $\zeta'_1,\ldots,\zeta'_s$.

Интерполяционный полином, построенный по узлам $\zeta'_1,\ldots,\zeta'_s$, обозначим через $P_s(f,[a,b])$.

На сегментах $\Delta^i_{0,j}$, $i=1,2$, $j=0,1,\ldots,M_0-1$, Δ^i_k, $i=1,2$, $k=0,1,\ldots,N-1$, функция $f(t) \in \bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$ аппроксимируется интерполяционными полиномами $P_s(f,\Delta^i_{0,j})$, $P_s(f,\Delta^i_k)$, $i=1,2$, $j=0,1,\ldots,M_0-1$, $k=0,1,\ldots,N-1$. Сплайн, составленный из этих полиномов, обозначим через $f_N(t)$.

Можно показать, что

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C([-1,1])} \le An^{-s}.$$

Отсюда следует, что

$$d_n(\bar{Q}^1_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \le An^{-s}. \tag{2}$$

Используя неравенство [5] $\delta_n(X,C) \le 2d_n(X,C)$ и оценки (1) и (2), завершаем доказательство теоремы при $u=1$.

Разделим сегмент $[-1,1]$ на $2N$ частей точками $t_k = -1 + \left(\frac{k}{N}\right)^v$, $\tau_k = 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^v$, $k = 0, 1, ..., N$, $v = s/(s-\gamma)$. Обозначим через Δ_k^1 и Δ_k^2 сегменты $\Delta_k^1 = [t_k, t_{k+1}]$ и $\Delta_k^2 = [\tau_{k+1}, \tau_k]$, $k = 0, 1, ..., N-1$. Введем числа $M_0 = [\ln^{u/r} N]$ и $M_k = [\ln^{(u-1)/s}(N/k)]$, $k = 1, 2, ..., N$. В случае, если $\ln^{(u-1)/s}(N/k) \le 1$, полагаем $M_k = 1$. Каждый из сегментов Δ_k^1 и Δ_k^2 разделим на M_k равных частей, $k = 0, 1, ..., N-1$. Сегменты, полученные в результате деления, обозначим через $\Delta_{k,j}^i$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, ..., N-1$, $j = 0, 1, ..., k-1$.

В каждом сегменте $\Delta_{k,j}^i$ функцию $f(t)$ будем приближать интерполяционным полиномом $P_s(f, \Delta_{k,j}^i)$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, ..., N-1$, $j = 0, 1, ..., M_k - 1$. Сплайн, составленный из полиномов $P_s(f, \Delta_{k,j}^i)$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, ..., N-1$, $j = 0, 1, ..., M_k - 1$, обозначим через $f_N(t)$.

Оценим точность аппроксимации функции $f(t)$ сплайном $f_N(t)$.

Пусть $t \in \Delta_0^i$, $i = 1, 2$. Очевидно,

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C(\Delta_{0,0}^1)} \le AE_{s-1}\left(f, \Delta_{0,0}^1\right)\lambda_s,$$

где $\Delta_{0,0}^1 = [t_{0,0}, t_{0,1}]$, $E_s(f, [a,b])$ – наилучшее приближение функции $f(t)$ на сегменте $[a,b]$ полиномом s-го порядка, λ_s – константа Лебега.

Используя отрезок ряда Тейлора $T_{r-1}(f, \Delta_{0,0}^1, -1)$, покажем, что

$$E_{s-1}(f, \Delta_{0,0}^1) \le \left\| f(t) - T_{r-1}(f, \Delta_{0,0}^1, -1) \right\|_{C(\Delta_{0,0})} \le$$

$$\le \frac{1}{(r-1)!} \max_{t \in \Delta_{0,0}^1} \left| \int_{-1}^{t} f^{(r)}(\tau)(t-\tau)^{r-1} d\tau \right| \le$$

$$\le \frac{M}{(r-1)!} \max_{t \in \Delta_{0,0}^1} \left| \int_{-1}^{t} (1 + |\ln^u(1+\tau)|)(t-\tau)^{r-1} d\tau \right| \le$$

$$\leq B(h_{00}^{r}\,|\ln^{u}h_{00}\,|)\leq B\left(\frac{1}{N^{v}M_{0}}\right)^{r}\ln^{u}\left(\frac{1}{N^{v}M_{0}}\right)\leq$$

$$\leq B\frac{1}{N^{s}\ln^{u}N}(\ln^{u}N+\ln^{u}\ln N)=B\frac{1}{N^{s}},$$

где $h_{00}=h_0/M_0$, $h_0=t_1-t_0$.

Здесь и всюду ниже через B обозначаются константы, независящие от N и от функции $f(t)$.

Аналогичным образом оцениваются значения $E_{r-1}(f,\Delta_{0,j}^{1})$, $j=1,2,\ldots,M_0-1$ и $E_{r-1}(f,\Delta_{0,j}^{2})$, $j=1,2,\ldots,M_0-1$.

Так как константа Лебега $\lambda_s\leq B\ln s$, то окончательно имеем $\|f(t)-f_N(t)\|_{C(\Delta_0^i)}\leq BN^{-s}$, $i=1,2$.

Оценим $\|f(t)-f_N(t)\|_{C(\Delta_{k,j}^{i})}$, $i=1,2$, $k=1,2,\ldots,N-1$, $j=0,1,\ldots,k-1$.

Очевидно,

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C(\Delta_{k,1}^{1})}\leq$$

$$\leq\frac{B(t_{k,1}-t_{k,0})^{s}}{2^{s-1}s!}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\left(1+\left|\ln^{u-1}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\right|\right)\leq B\left(\frac{h_k}{M_k}\right)^{s}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\left(1+\ln^{u-1}\frac{N}{k}\right)\leq$$

$$\leq B\left(\left(\left(\frac{k+1}{N}\right)-\left(\frac{k}{N}\right)^{v}\right)\frac{1}{\left(\ln\frac{N}{k}\right)^{(u-1)/s}}\right)^{s}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\left(1+\ln^{u-1}\frac{N}{k}\right)\leq$$

$$\leq B\frac{(k+\theta)^{(v-1)s-v\gamma}}{N^{s}}\leq\frac{B}{N^{s}}.$$

Аналогичным образом оцениваются нормы

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C(\Delta_{k,j}^{1})},\ k=1,2,\ldots,N-1,\ j=1,2,\ldots,k-1,$$

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C(\Delta_{k,j}^{2})},\ k=1,2,\ldots,N-1,\ j=0,1,\ldots,k-1.$$

Собирая полученные выше оценки, имеем

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C([-1,1])}\leq BN^{-s}.$$

Оценим число узлов, используемых при построении локального сплайна.

Для этого оценим число сегментов $\Delta_{k,j}^{i}$, $i=1,2$, $k=0,1,\dots,N-1$, $j=0,1,\dots,k-1$.

Очевидно, в случае, когда $u-1\le s$,

$$m=2\sum_{k=0}^{N-1}M_k\le 2\left(\ln^{\frac{u}{r}}N+\sum_{k=1}^{N-1}\ln^{\frac{u-1}{s}}\frac{N}{k}\right)\le 2\left(\ln^{\frac{u}{r}}N+\sum_{k=1}^{N-1}\ln\frac{N}{k}\right)=$$

$$=2\left(\ln^{\frac{u}{r}}N+(N-1)\ln N-\sum_{k=2}^{N-1}\ln k\right)\le 2\left(\ln^{\frac{u}{r}}N+(N-1)\ln N-\int_{2}^{N-1}\ln x dx\right)\le$$

$$\le 2\left(\ln^{\frac{u}{r}}N+(N-1)\ln N-(N-1)\ln(N-1)+N\right)=$$

$$=2\left(\ln^{\frac{u}{r}}N+\ln\left(\frac{N}{N-1}\right)^{N-1}+N\right)=BN.$$

Рассмотрим общий случай. Пусть $q=[(u-1)/s]+1$. Тогда

$$m=2\sum_{k=0}^{N-1}M_k\le 2\left(\ln^{\frac{u}{r}}N+\sum_{k=1}^{N-1}\ln^{\frac{u-1}{s}}\frac{N}{k}\right)\le B\left(N+\sum_{k=1}^{N-1}\ln^{q}\frac{N}{k}\right)=$$

$$=B\left(N+\sum_{k=2}^{N-1}\left|\ln^{q}\frac{N}{k}\right|\right)\le B\left(N+\int_{1}^{N}\left|\ln^{q}\frac{x}{N}\right|dx\right)=B\left(N+N\int_{1/N}^{1}\left|\ln^{q}t\right|dt\right)\le BN\ .$$

Следовательно, общее число узлов, используемых при построении локального сплайна $f_N(t)$, равно $n=sm=BN$.

Отсюда следует, что

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C([-1,1])}\le BN^{-s}.$$

Следовательно,

$$d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^{u}(\Omega,M),C)\le An^{-s}. \tag{3}$$

Используя неравенство $\delta_n(X)\le 2d_n(X,C)$ и оценки (1), (3), завершаем доказательство теоремы в общем случае.

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\Omega=[-1,1]$, r,u – положительные целые числа, γ – положительное рациональное число, $s=r+[\gamma]+1$. Справедлива оценка

$$\delta_n(Q_{r,\gamma}^{u}(\Omega,M))\asymp d_n(Q_{r,\gamma}^{u}(\Omega,M),C)\asymp n^{-s}.$$

2 Поперечники множества функций $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 2, 3, \ldots$

Теорема 3. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 2, 3, \ldots$, $u = 1, 2, \ldots$, $v = s/(s-\gamma)$. Справедливы оценки

$$\delta_n(\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp d_n(\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \asymp \begin{cases} n^{-s/l}, v < l/(l-1), \\ \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^{s/l}, v = l/(l-1), r \geq ul, s \geq (u-1)l. \end{cases}$$

Доказательство. Вначале найдем оценку снизу поперечника Бабенко $\delta_n(\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M))$. Для этого заметим, что множество функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ вложено в $\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$. Известно [3, 4], что

$$\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq \begin{cases} n^{-s/l}, v < l/(l-1), \\ \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^{s/l}, v = l/(l-1). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\delta_n(\bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq \delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq A \begin{cases} n^{-s/l}, v < l/(l-1), \\ \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^{s/l}, v = l/(l-1). \end{cases}$$

Оценка снизу получена.

Приступим к построению непрерывных локальных сплайнов, аппроксимирующих функции $f(t) \in \bar{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $t = (t_1, \ldots, t_l)$.

Вначале рассмотрим случай, когда $v < l/(l-1)$.

Обозначим через Δ_k множество точек $t = (t_1, \ldots, t_l)$ таких, что расстояние от t до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенству

$$\left(\frac{k}{N}\right)^v \leq d(t, \Gamma) \leq \left(\frac{k+1}{N}\right)^v, \ k = 0, 1, \ldots, N-1, v = s/(s-\gamma).$$

Здесь $d(t, \Gamma) = \min\limits_{1 \leq i \leq l} \min(|t_i - 1|, |t_i + 1|)$.

Каждую область Δ_k покроем кубами и параллелепипедами $\Delta^k_{i_1, \ldots, i_l}$ с гранями, параллельными координатным плоскостям, и с ребрами, длины которых равны $h_k = \left(\dfrac{k+1}{N}\right)^v - \left(\dfrac{k}{N}\right)^v$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. При этом в число вершин кубов (или параллелепипедов) $\Delta^{k-1}_{i_1, \ldots, i_l}$ входят вершины кубов (или параллелепипедов) $\Delta^k_{i_1, \ldots, i_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

То обстоятельство, что среди кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ при каждом значении k могут находиться параллелепипеды, у которых длина одного или нескольких ребер меньше h_k, не влияет на общность рассуждений. Введем числа $M_0 = 1 + \left[(\ln N)^{u/r}\right]$, $M_k = 1 + \left[\left(\ln \frac{N}{k}\right)^{(u-1)/s}\right]$. Каждый из квадратов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ покроем M_k^l квадратами, которые обозначим через $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l;\, j_1,\dots,j_l}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Обозначим через $P_{s,\dots,s}(f, [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l])$ интерполяционный полином, который определяется формулой

$$P_{s,\dots,s}(f, [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]) = P_s^{t_1}[P_s^{t_2}[\dots[P_s^{t_l}[f, [a_l, b_l]], [a_{l-1}, b_{l-1}]], \dots, [a_1, b_1]],$$

где полином $P_s(f, [a,b])$ определен в предыдущем параграфе, а верхний индекс в выражении $P_s^{t_i}(f, [a_i, b_i])$ определяет переменную, по которой проводится интерполяция.

Построение сплайна начнем с куба Δ^{N-1}. В этом кубе функцию $f(t)$ приближаем интерполяционным полиномом $P_{s,\dots,s}(f, \Delta^{N-1})$. Построив этот полином, переходим к приближению функции $f(t)$ в кубах и параллелепипедах $\Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l,\, j_1,\dots,j_l}$. В каждом из кубов (и параллелепипедов) $\Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l,\, j_1,\dots,j_l}$ функция $f(t)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_{s,\dots,s}\left(f, \Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_2,\, j_1,\dots,j_l}\right)$, который строится следующим образом. В узлах интерполяционного полинома $P_{s,\dots,s}\left(f, \Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l,\, j_1,\dots,j_l}\right)$, не расположенных на гранях куба Δ^{N-1}, берутся значения функции $f(t)$, а в узлах, расположенных на соответствующих гранях куба Δ^{N-1}, берутся значения полинома $P_{s,\dots,s}(f, \Delta^{N-1})$. Сначала строятся интерполяционные полиномы $P_{s,\dots,s}\left(f, \Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l,\, j_1,\dots,j_l}\right)$ в области Δ^{N-2}, аналогичным образом строятся интерполяционные полиномы в области Δ^{N-3} и последовательно во всех областях до Δ^0 включительно.

Сплайн, составленный из полиномов

$$P_{s,\dots,s}\left(f, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l;\, j_i,\dots j_l}\right), k = 0, 1, \dots, N-1,$$

обозначим через $f_N(t_1, \dots, t_l)$.

После проведения громоздких вычислений можно показать, что

$$\| f(t) - f_N(t) \|_{C(\Omega)} \le AN^{-s}$$

и что число узлов n, используемых при построении сплайна $f_N(t)$, равно $n \asymp N^l$.

Из непрерывности локального сплайна $f_N(t)$ и двух последних оценок следует, что

$$d_n(\overline{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \le An^{-s/l}.$$

Из этого неравенства, неравенства $\delta_n(X, C) \le 2d_n(X, C)$ и оценки снизу поперечника Бабенко следует справедливость теоремы при $v < l/(l-1)$.

Аналогичным образом исследуется случай, когда $v = l/(l-1)$.

Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда $u = 1, v = s/(s-\gamma), v > l/(l-1)$.

В этом случае справедливо утверждение, которое приведем без доказательства.

Теорема 4. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 2, 3, \ldots$, $u = 1$, $v = s/(s-\gamma)$, $v > l/(l-1)$. Справедлива оценка

$$\delta_n(\overline{Q}^1_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp d_n(\overline{Q}^1_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \asymp \frac{\ln n}{n^{(s-\gamma)/(l-1)}}.$$

Список литературы

1. **Бабенко, К. И.** О некоторых задачах теории приближений и численного анализа / К. И. Бабенко // Успехи математических наук. – 1985. – Т. 40. – Вып. 1. – С. 3–28.
2. **Бойков, И. В.** Оптимальные по точности алгоритмы вычисления интегралов / И. В. Бойков // Оптимальные методы вычислений и их применение : межвузовский сборник научных трудов. – Вып. 8. – Пенза : Изд-во Пенз. политехн. ин-та, 1987. – С. 4–22.
3. **Бойков, И. В.** Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами / И. В. Бойков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38. – № 1. – С. 25–33.
4. **Бойков, И. В.** Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2007. – 236 с.
5. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / под ред. К. И. Бабенко. – М. : Наука, 1979. – 196 с.

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет

Boykov Ilya Vladimirovich
Doctor of Science (in Mathematics), professor, head of sub-department of highest and applied mathematics, Penza State University

УДК 518.5
Бойков, И. В.
Поперечники некоторых множеств дифференцируемых функций / И. В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 44–54.